Научная статья
УДК 519.21
DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-18-27

МОМЕНТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА ДЛЯ СУММЫ ВЗВЕШЕННЫХ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Николай Сергеевич Аркашов

Институт математики им. С.Л.Соболева СО РАН,
Новосибирск, Россия

nicky1978@mail.ru,n.s.arkashov@math.nsc.ru
https://orcid.org/0000-0001-8098-377X

Аннотация

В работе получены верхняя и нижняя оценки для моментов бесконечной суммы взвешенных независимых одинаково распределенных случайных величин. Представленные неравенства обобщают известные неравенства Хинчина..

Ключевые слова и фразы

моментное неравенство, неравенство Хинчина, независимые случайные величины.

Источник финансирования

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных научных исследований СО РАН, проект FWNF-2024-0001.

Для цитирования

Аркашов Н. С. Моментные неравенства для суммы взвешенных независимых одинаково распределенных случайных величин // *Математические труды*, 2025, Т. 28, № 2, С. 18-27. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-18-27

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 18-27
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 18-27

Moment Inequalities for the Sum of Weighted Independent Identically Distributed Random Variables

Nickolay S. Arkashov

Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia

nicky1978@mail.ru,n.s.arkashov@math.nsc.ru
https://orcid.org/0000-0001-8098-377X

Abstract

In the present article, we find lower and upper estimates for the moments of the infinite sum of weighted identically distributed random variables. These estimates generalize the well-known Khinchin inequalities.

Keywords

Moment inequality, Khinchin inequality, independent random variables.

Funding

The work was carried out with the financial support of the fundamental scientific research program of the SB RAS, project FWNF-2024-0001.

For citation

Arkashov N. S. Moment Inequalities for the Sum of Weighted Independent Identically Distributed Random Variables // *Mat. Trudy*, 2025, V. 28, N 2, P. 18-27. DOI 10.25205/1560-750X-2025-28-2-18-27

§ 1. Введение и постановка задачи.

Пусть $\{\xi_k,\ k \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией, $\{c_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ — некоторая последовательность действительных чисел.

Приведем известные моментные неравенства Хинчина (см. [1]). Пусть дополнительно к введенным выше условиям на $\{\xi_k\}$ случайные величины этой последовательности являются радемахеровскими (т. е. $\mathbf{P}(\xi_k = -1) = \mathbf{P}(\xi_k = 1) = 1/2$). Тогда для любого $0 < \delta < \infty$ существуют универсальные константы a_δ и b_δ (не зависящие от $\{c_n\}$), что для любого $n \geq 1$

$$a_\delta(\sum_{k=1}^{n} c_k^2)^\delta \leq \mathbf{E}|\sum_{k=1}^{n} c_k\xi_k|^{2\delta} \leq b_\delta(\sum_{k=1}^{n} c_k^2)^\delta. \tag{1}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 18-27
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 18-27

В дальнейшем будем считать, что $\{c_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ — последовательность суммируемых с квадратом действительных чисел. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k \xi_k.$$

Очевидно, что этот ряд сходится почти наверное.

Цель настоящей работы — при каждом $0 < \delta < \infty$ при условии конечности $\mathbf{E}|\xi_0|^{\max\{2,2\delta\}}$ получить верхнюю и нижнюю оценки для $\mathbf{E}|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\xi_k|^{2\delta}$.

§ 2. Основные утверждения.

2.1 Предварительные сведения.

Приведем известное неравенство Ляпунова (см., например, [2, гл.2, §6]): если $0 < s \le t$, то

$$(\mathbf{E}|\zeta|^s)^{1/s} \le (\mathbf{E}|\zeta|^t)^{1/t}. \tag{2}$$

В дальнейшем, говоря о неравенстве Ляпунова, мы будем подразумевать неравенство (2).

2.2 Формулировки теорем.

Теорема 1. *Пусть $0 < \delta < \infty$ и $\mathbf{E}|\xi_0|^{\max\{2,2\delta\}} < \infty$. Тогда существует положительная константа A_δ, зависящая от δ, распределения ξ_0 и независящая от $\{c_n\}$, такая что выполняется неравенство*:

$$A_\delta(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^2)^\delta \le \mathbf{E}|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\xi_k|^{2\delta}. \tag{3}$$

В случае $\delta \ge 1$ неравенство (3) сразу следует из неравенства Ляпунова (достаточно положить в (2) $t = 2\delta$, $s = 2$, $\zeta = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\xi_k$), при этом, очевидно, A_δ=1.

Неравенство (3) в случае $\delta < 1$ является основным результатом работы. Заметим, что константа A_δ в этом случае конкретизируется в (21).

Предложение 1. *Пусть $0 < \delta < \infty$ и $\mathbf{E}|\xi_0|^{\max\{2,2\delta\}} < \infty$. Тогда существует положительная константа B_δ, зависящая от δ, распределения ξ_0 и независящая от $\{c_n\}$, что выполняется неравенство*:

$$\mathbf{E}|\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k\xi_k|^{2\delta} \le B_\delta(\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^2)^\delta. \tag{4}$$

В случае $\delta \le 1$ неравенство (4) следует из неравенства Ляпунова, при этом B_δ=1. В случае $\delta > 1$ константа B_δ конкретизируется в (24).

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 18-27
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 18-27

§ 3. Доказательства.

3.1 Предварительные сведения к доказательству теоремы 1.

Пусть η — некоторая случайная величина. Построим на одном вероятностном пространстве с η случайную величину $\overline{\eta}$, независимую от η и имеющую то же распределение, что и η. Будем говорить, что следующая разность: $\widetilde{\eta} = \eta - \overline{\eta}$ является симметризацией η.

Построим последовательность $\{\overline{\xi}_k\}$ независимых одинаково распределенных случайных величин, такую что $\{\overline{\xi}_k\}$ не зависит от $\{\xi_k\}$ и $\overline{\xi}_0$ совпадает по распределению с ξ_0. Далее, помимо $\{\xi_k\}$, будем использовать последовательность: $\{\widetilde{\xi}_k\}$ (здесь $\widetilde{\xi}_k = \xi_k - \overline{\xi}_k$).

Введем обозначения:

$$S = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \xi_k \tag{5}$$

и

$$S_N = \sum_{k=-N}^{N} c_k \xi_k, \ N = 1, 2, \ldots . \tag{6}$$

Нам понадобится следующий общий результат (см., например, [4]).

Лемма 1. *Пусть $\{\zeta_n\}$ — последовательность случайных величин, для которой при некотором положительном ε выполняется неравенство*:

$$\sup_n \mathbf{E}|\zeta_n|^{1+\varepsilon} < \infty.$$

Тогда $\{\zeta_n\}$ — равномерно интегрируемая последовательность.

3.2 Доказательство теоремы 1.

Рассмотрим случай $\delta < 1$.

Покажем, что последовательность $\{|S_N|^{2\delta}\}_{N \geq 1}$ является равномерно интегрируемой. Определим функцию $G(t) = t^{1/\delta}$. Имеет место соотношение:

$$\mathbf{E}G(|S_N|^{2\delta}) = \sum_{k=-N}^{N} c_k^2.$$

Следовательно,

$$\sup_N \mathbf{E}G(|S_N|^{2\delta}) \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2 < \infty.$$

Откуда в соответствии с леммой 1 вытекает упомянутая равномерная интегрируемость. Кроме того, отметим, что $S_N \to S$ при $N \to \infty$ (п. н.). Эта сходимость и равномерная интегрируемость $\{|S_N|^{2\delta}\}_{N\geq 1}$ влечет

$$\mathbf{E}|S_N|^{2\delta} \to \mathbf{E}|S|^{2\delta},\ N \to \infty. \tag{7}$$

Далее, нам понадобится следующая лемма (см. [3, 5]).

Лемма 2. *Пусть* $Y_1,...,Y_n$ *— независимые случайные величины,* $\mathbf{E}|Y_k|^p < \infty$ $(k = 1, ..., n)$. *Положим*

$$\Lambda_n(y,p) = \left(\sum_{k=1}^{n} \int_{|x|<y} x^2 d\widetilde{V}_k(x)\right)^{p/2} + \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|\geq y} |x|^p d\widetilde{V}_k(x) \tag{8}$$

и $\lambda_n(p) = \inf_{y\geq 0} \Lambda_n(y,p)$, *где* $\widetilde{V}_k(x)$ *— функция распределения симметризованной случайной величины* $\widetilde{Y}_k$.

Если $1 \leq p < 2$ *и* $\mathbf{E}Y_k = 0$ *для всех* k, *то*

$$d_1(p)\lambda_n(p) \leq \mathbf{E}|\sum_{k=1}^{n} Y_k|^p \leq d_2(p)\lambda_n(p).$$

Если $0 < p < 1$ *и каждая случайная величина* Y_k *имеет нуль своей медианой (т. е.* $\mathbf{P}(Y_k < 0) \leq 1/2,\ \mathbf{P}(Y_k \leq 0) \geq 1/2$), *то*

$$d_1(p)\lambda_n(p) \leq \mathbf{E}|\sum_{k=1}^{n} Y_k|^p \leq 2\lambda_n(p).$$

Здесь $d_1(p)$, $d_2(p)$ *— положительные константы, зависящие только от* p.

Прежде всего пусть $1/2 \leq \delta < 1$. Применим лемму 2 к набору $\{c_k\xi_k,\ k = -N, \dots, N\}$ $(p = 2\delta)$. Соотношение (8) перепишем в виде:

$$\Lambda_{2N+1}(y, 2\delta) = (\sum_{k=-N}^{N} c_k^2 \mathbf{E}(\widetilde{\xi}_0^2 \chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| < y\}))^{\delta} + \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^{2\delta} \mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta} \chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| \geq y\}), \tag{9}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 18-27
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 18-27

где $\chi(\cdot)$ — индикаторная функция. Рассмотрим первое слагаемое правой части (9). В силу неравенства Ляпунова имеем

$$\mathbf{E}(\widetilde{\xi}_0^2\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| < y\}) \geq [\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| < y\})]^{1/\delta}.$$

Откуда получаем оценку снизу для упомянутого первого слагаемого

$$\begin{aligned}(\sum_{k=-N}^{N} c_k^2\mathbf{E}(\widetilde{\xi}_0^2\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| < y\}))^{\delta} \\ \geq (\sum_{k=-N}^{N} c_k^2[\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| < y\})]^{1/\delta})^{\delta}.\end{aligned} \tag{10}$$

Рассмотрим второе слагаемое правой части (9). Используя следующее неравенство (см., например, [5])

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p \geq |\sum_{k=1}^{n}a_k|^p \quad (0 < p \leq 1), \tag{11}$$

справедливое для любого $n \in \mathbb{N}$ и любых $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, выводим оценку снизу

$$\begin{aligned}\sum_{k=-N}^{N}|c_k|^{2\delta}\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| \geq y\}) \\ \geq (\sum_{k=-N}^{N} c_k^2[\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| \geq y\})]^{1/\delta})^{\delta}.\end{aligned} \tag{12}$$

Складывая (10) и (12), получаем

$$\begin{aligned}\Lambda_{2N+1}(y, 2\delta) \geq (\sum_{k=-N}^{N} c_k^2[\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| < y\})]^{1/\delta})^{\delta} \\ + (\sum_{k=-N}^{N} c_k^2[\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| \geq y\})]^{1/\delta})^{\delta}.\end{aligned}$$

Из (11) (для случая $n = 2$) выводим

$$\begin{aligned}\Lambda_{2N+1}(y, 2\delta) \geq \Bigg(\sum_{k=-N}^{N} c_k^2\ \big([\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| < y\})]^{1/\delta} \\ +[\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0| \geq y\})]^{1/\delta}\big)\Bigg)^{\delta}.\end{aligned} \tag{13}$$

Рассмотрим правую часть (13). Найдем оценку снизу для

$$[\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0|<y\})]^{1/\delta}+[\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0|\geq y\})]^{1/\delta}. \qquad (14)$$

Будем использовать следующее неравенство (см., например, [5])

$$n^{p-1}\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p \geq |\sum_{k=1}^{n}a_k|^p \quad (p\geq 1), \qquad (15)$$

справедливое для любого $n\in\mathbb{N}$ и любых $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$. Используя (15) при $n=2$, находим оценку снизу для (14):

$$2^{1-\frac{1}{\delta}}\left(\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0|<y\})+\mathbf{E}(|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0|\geq y\})\right)^{1/\delta}.$$

Поскольку в полученном выражении $\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0|<y\}+\chi\{|c_k||\widetilde{\xi}_0|\geq y\}=1$, поэтому мы сразу получаем, что это выражение равно $2^{1-\frac{1}{\delta}}(\mathbf{E}|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta})^{1/\delta}$. Применяя найденную оценку к (13), выводим

$$\Lambda_{2N+1}(y,2\delta)\geq 2^{\delta-1}\mathbf{E}|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}(\sum_{k=-N}^{N}c_k^2)^{\delta}. \qquad (16)$$

В соответствии с леммой 2 мы получаем неравенство

$$d_1(2\delta)2^{\delta-1}\mathbf{E}|\widetilde{\xi}_0|^{2\delta}(\sum_{k=-N}^{N}c_k^2)^{\delta}\leq\mathbf{E}|S_N|^{2\delta}. \qquad (17)$$

Перейдем к случаю $\delta<1/2$. Напомним, что $\widetilde{\xi}_k=\xi_k-\overline{\xi}_k$ (см. раздел 3.1). Очевидно, что

$$\mathbf{E}|\sum_{k=-N}^{N}c_k\widetilde{\xi}_k|^{2\delta}\leq\mathbf{E}\left(|\sum_{k=-N}^{N}c_k\xi_k|+|\sum_{k=-N}^{N}c_k\overline{\xi}_k|\right)^{2\delta}.$$

Применяя (11) (для случая $n=2$) к правой части последнего неравенства, выводим

$$\mathbf{E}|\sum_{k=-N}^{N}c_k\widetilde{\xi}_k|^{2\delta}\leq 2\mathbf{E}|\sum_{k=-N}^{N}c_k\xi_k|^{2\delta}. \qquad (18)$$

Рассмотрим набор $\{c_k\widetilde{\xi}_k,\ k=-N,\dots,N\}$ (очевидно, что $\{\widetilde{\xi}_k\}$ имеют ноль своей медианой). Далее воспользуемся леммой 2. Проводя вычисления, аналогичные случаю $1/2\leq\delta<1$, получаем

$$d_1(2\delta)2^{\delta-1}\mathbf{E}|\widetilde{\zeta}|^{2\delta}(\sum_{k=-N}^{N}c_k^2)^{\delta}\leq\mathbf{E}|\sum_{k=-N}^{N}c_k\widetilde{\xi}_k|^{2\delta},$$

где $\zeta = \widetilde{\xi}_0$. Из этого неравенства и из (18) сразу следует

$$d_1(2\delta)2^{\delta-2}\mathbf{E}|\widetilde{\zeta}|^{2\delta}(\sum_{k=-N}^{N} c_k^2)^{\delta} \le \mathbf{E}|S_N|^{2\delta}. \tag{19}$$

Имея в виду (7), перейдем в (17) и (19) к пределу при $N \to \infty$, в итоге получаем

$$A_\delta(\mathbf{D}S)^\delta \le \mathbf{E}|S|^{2\delta}, \tag{20}$$

где

$$A_\delta = \begin{cases} d_1(2\delta)2^{\delta-1}\mathbf{E}|\widetilde{\xi_0}|^{2\delta} & \text{при } 1/2 \le \delta < 1, \\ d_1(2\delta)2^{\delta-2}\mathbf{E}|\widetilde{\zeta}|^{2\delta} & \text{при } \delta < 1/2. \end{cases} \tag{21}$$

Теорема доказана.

3.3 Доказательство предложения 1.

Будем рассматривать случай $\delta > 1$. Утверждение предложения 1 следует из неравенства Розенталя, при этом мы придерживаемся схемы доказательства леммы 13 из [6]. Приведем упомянутое неравенство (см., например, [5]).

Лемма 3. *Пусть $\{Y_k\}_{k=1\dots n}$ — независимые случайные величины, $EY_k = 0$ для любого k, $p \ge 2$. Положим*

$$M_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}|Y_k|^p, \ B_n = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{E}Y_k^2.$$

Тогда

$$\mathbf{E}|\sum_{k=1}^{n} Y_k|^p \le d(p)(M_{p,n} + B_n^{p/2}),$$

где $d(p)$ — положительная константа, зависящая только от p.

Применим лемму 3 к набору $\{c_k\xi_k,\ k = -N, \dots, N\}$ $(p = 2\delta)$, при этом заметим, что

$$M_{2\delta,2N+1} = \mathbf{E}|\xi_0|^{2\delta} \sum_{k=-N}^{N} |c_k|^{2\delta}, \ B_{2N+1} = \sum_{k=-N}^{N} c_k^2.$$

В итоге получаем неравенство (см. (6))

$$\mathbf{E}|S_N|^{2\delta} \leq d(2\delta)(M_{2\delta,2N+1} + B_{2N+1}^{\delta}). \tag{22}$$

Из леммы Фату (см., например, [2]) следует, что

$$\mathbf{E}(\liminf_{N\to\infty} |S_N|^{2\delta}) \leq \liminf_{N\to\infty} \mathbf{E}|S_N|^{2\delta}.$$

Применяя это неравенство к (22), с учетом того, что $\mathbf{D}S = \sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^2$ (см. (5)), выводим

$$\mathbf{E}|S|^{2\delta} \leq d(2\delta)(\mathbf{E}|\xi_0|^{2\delta} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^{2\delta} + (\mathbf{D}S)^{\delta}). \tag{23}$$

Отметим следующее очевидное неравенство. Для абсолютно суммируемой последовательности $\{b_k\}$ выполняется

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|^{\delta} \leq (\sum_{k\in\mathbb{Z}} |b_k|)^{\delta},\ \delta \geq 1.$$

Из этого неравенства следует, что

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k|^{2\delta} \leq (\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k^2)^{\delta}.$$

Применяя полученное неравенство к (23), выводим

$$\mathbf{E}|S|^{2\delta} \leq B_{\delta}(\mathbf{D}S)^{\delta},$$

где

$$B_{\delta} = d(2\delta)(\mathbf{E}|\xi_0|^{2\delta} + 1). \tag{24}$$

Предложение доказано.

Список литературы

1. *Khintchine A.* Über dyadische Brüche // *Math. Z.* 1923. V. 18, N 1. P. 109-116.

2. *Ширяев А. Н. Вероятность.* М.: Наука, 1980.

3. *Манставичюс Э.* Неравенства для момента порядка p, 0 < p < 2, суммы независимых случайных величин // *Литов. мат. сб.* 1982. Т. 22, № 1. С. 112-116.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 18-27
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 18-27

4. *Биллингсли П. Сходимость вероятностных мер.* М.: Наука, 1977.

5. *Петров В. В. Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* М.: Наука, 1987.

6. *Аркашов Н.С., Борисов И.С.* Гауссовская аппроксимация процессов частных сумм скользящих средних // *Сиб. мат. журн.* 2004. Т. 45, № 6. С. 1221-1255.

References

1. *Khintchine A.* Über dyadische Brüche // *Math. Z.* 1923. V. 18, N 1. P. 109-116.

2. *Shiryaev A. N. Probability.* M.: Nauka, 1980.

3. *Manstavičius E.* Inequalities for the p-th moment, p, 0<p<2, of a sum of independent random variables // *Litov. Mat. Sb.* 1982. V. 22, № 1. P. 112-116.

4. *Billingsley P. Convergence of Probability Measures.* M.: Nauka, 1977.

5. *Petrov V. V. Limit Theorems for Sums of Independent Random Variables.* M.: Nauka, 1987.

6. *Arkashov N.S., Borisov I.S.* Gaussian approximation to the partial sum processes of moving averages // *Sib. Mat. Zh.* 2004. V. 45, № 6. P. 1221-1255.

Информация об авторе

Николай Сергеевич Аркашов, Доктор физико-математических наук, доцент
SPIN 4337-6140 AuthorID: 140684
Scopus Author ID 6504506126

Author Information

Nickolay S. Arkashov, Doctor of Mathematics, Associate Professor
SPIN 4337-6140 AuthorID: 140684
Scopus Author ID 6504506126

Статья поступила в редакцию 15.03.2025; одобрена после рецензирования 26.05.2025; принята к публикации 11.06.2025

The article was submitted 15.03.2025; approved after reviewing 26.05.2025; accepted for publication 11.06.2025

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2025, Том 28, № 2, С. 18-27
Mat. Trudy, 2025, V. 28, N. 2, P. 18-27